ماخ

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله اول
هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۹

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۸	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۸ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آذرماه ۱۳۶۹

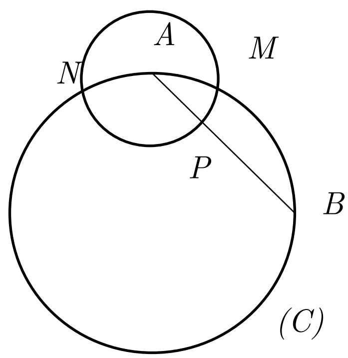
۱- اگر A_1، A_2، . . . ، A_n و . . . مجموعه‌های دلخواه باشند، مجموعه‌های B_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B_n = \begin{cases} A_1 & n = 1 \quad \text{اگر} \\ A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i & n \geq 2 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $B_n \cap B_m = \phi$ $(n \neq m)$.

ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

۲- وتر AB از دایره‌ی (C) را در نظر می‌گیریم. دایره‌ی دیگری به مرکز A و به شعاع کوچک‌تر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایره‌ی (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطه‌ی P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان $\widehat{MB}$ می‌گذرد.



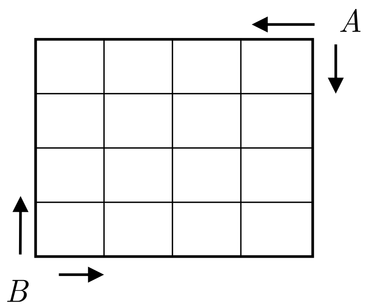
۳- نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n \geq 5$، $n!$ بر کلیه‌ی اعداد ۱، ۲، . . . و k بخش‌پذیر است به‌شرط اینکه $k+1$ کوچک‌ترین عدد اول بزرگ‌تر از n باشد. (می‌دانیم $n \geq 2$ بین n و $2n$ [حداقل] یک عدد اول وجود دارد).

۴- همه‌ی اعداد حقیقی x، y و z را تعیین کنید که در رابطه‌های زیر صادق باشند:

$$x(1+y) = y(1+z) = z(1+x)$$

۵- ثابت کنید در هر مثلث، خطوطی که اوساط اضلاع را به اوساط ارتفاع‌های متناظر وصل می‌کنند، متقاربند [همرس‌اند]. آیا می‌توان به‌جای ارتفاع‌ها، هر سه خط متقارب [همرس] را در نظر گرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

۶- در شبکه‌ی ۴×۴ شکل زیر متحرکی از نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی B حرکت می‌کند به‌طوری‌که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A درحرکت است به‌طوری‌که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک باهم شروع به حرکت نمایند، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.



۷- از تساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{-۱,۰,۱\},\qquad f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)+f\left(-\frac{۱}{x}\right)+f\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)=x$$

۸- اگر $a_۱ \geq a_۲ \geq \ldots \geq a_n \geq ۰$، $b_i > ۰$ و به ازای هر $(۱ \leq k \leq n)$،

$$\sum_{j=۱}^{k} a_j \leq \sum_{j=۱}^{k} b_j$$

$$\sum_{i=۱}^{k} a_i^۲ \leq \sum_{j=۱}^{k} b_i^۲$$

حل مسأله های مرحله‌ی اول هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، آذرماه ۱۳۶۹

۱- فرض کنید $m<n$. داریم

$$B_n = A_n \cap A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_m \cap \ldots \cap A'_{n-1}$$

بدیهی است که $B_n \subseteq A_n, B_m \cap B_n = \varnothing$ و درنتیجه $\bigcup_{n=1} B_n \subseteq \bigcup_{n=1} A_n$. حال اگر $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $x \in A_n$، پس $x \in A'_k$، $k = 1, 2, \ldots, n-1$، پس $x \in B_n$. ازآنجا $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و بنابراین،

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

۲- نیمساز زاویه‌ی MAP عمودمنصف پاره‌خط MP است. که از وسط کمان MB می‌گذرد. حال در مثلث MNB نیمساز زاویه $\angle MNB$ و عمودمنصف ضلع MB یکدیگر را بر دایره‌ی محیطی مثلث MNB قطع می‌کنند، که وسط قوس MB است. پس عمودمنصف‌های دو ضلع MP و MB از مثلث MPB یکدیگر را در وسط قوس MB قطع می‌کنند. درنتیجه عمودمنصف ضلع سوم BC نیز از این نقطه می‌گذرد.

۳- واضح است که برای $j = 1, 2, \ldots, n$ داریم $j \mid n!$. حال برای هر $n < j < k+1$، j مرکب است، یعنی اعداد طبیعی $a, b \geq 2$ یافت می‌شوند که $j = ab$. چون بین اعداد n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد پس $j < 2n$. ولی اگر $a > n$، چون $b \geq 2$ آنگاه a و b دو عدد مختلف از اعداد ۱، ۲، . . . و n هستند، پس $j = ab \mid n!$. اما اگر هیچ دو عدد متفاوتی مانند a و b وجود نداشته باشند که $j=ab$، در این صورت $j = p^2$. اما اگر هیچ دو عدد متفاوتی مانند a و b وجود نداشته باشند که $j=ab$، در این صورت $j = p^2$ که p اول است. اگر $p \geq 4$ آنگاه $j = p^2 \geq 4p$، یعنی $4p \leq j < 2n$. پس $2p < n$. یعنی هم p و هم $2p$. یعنی هم p و هم $2p$ جزء اعداد ۱، ۲، . . . و n هستند. پس $j = p^2 \mid n!$. اگر $p = 3$ آنگاه $j = 9$ و درنتیجه $k+1 = 11$. هیچ عددی اول نیست، پس n فقط می‌تواند به‌صورت ۷ یا ۸ باشد که در آن صورت $j = 9 \mid 7!$ و $j = 9 \mid 8!$ و چون $n \geq 5$ پس $p^2 = j > 5$، یعنی $p > 2$. بنابراین، حالت دیگری امکان‌پذیر نیست یعنی برای هر j، $j \mid n!$ و اگر $n = k$ حکم واضح است.

۴- اگر $y = -1$ باشد نتیجه می‌شود $x = -1$ و $z = -1$. فرض کنیم $y \neq -1$. داریم

$$x = \frac{y(1+z)}{1+y} \Rightarrow y(1+z) = z\left(1 + \frac{y(1+z)}{1+y}\right)$$

$$\Rightarrow (y-z) = (1+y+yz) = 0$$

$$\Rightarrow y - z = 0 \quad \text{یا} \quad 1 + y + yz = 0$$

اگر $y=z$ ، داریم $x=y=z$ و اگر $1+y+yz=0$ خواهیم داشت $y(1+z)=-1$.

$$1+z=\frac{-1}{y}\Rightarrow z=\frac{-1}{y}-1$$

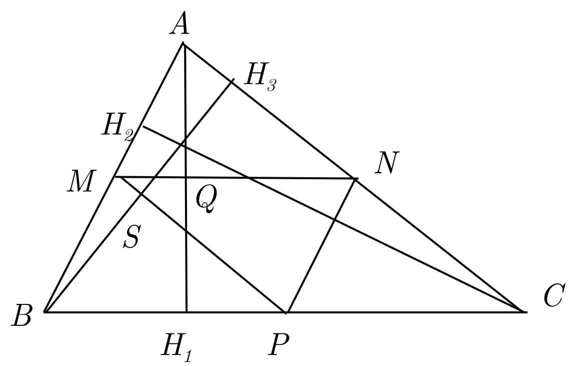
که با فرض $y=\beta$, $\beta\neq 1,\beta\in\mathbb{R}$ و $\beta\neq 0$ نتیجه می‌شود

$$1+x+\beta x=0\Rightarrow x=\frac{-1}{1+\beta}$$

$$y=\beta,x=\frac{-1}{1+\beta},z=\frac{-1}{\beta-1}$$

درصورتی‌که $y=0$ باشد، به‌سادگی ثابت می‌شود که $x=z=0$.

۵- ماخ با توجه به شکل



$$\frac{QM}{QN}=\frac{BH_1}{H_1C}$$

$$\frac{RN}{RP}=\frac{AH_2}{H_2B}$$

$$\frac{SP}{SM}=\frac{CH_3}{H_3A}$$

با ضرب طرفین تساوی در یکدیگر و با توجه به این‌که ارتفاع‌ها متقاربند، بنابر قضیه‌ی سوا حاصل‌ضرب‌های طرف دوم یک و ازآنجا بنابر عکس قضیه‌ی سوا خطوط NS، PQ و MR همرس‌اند.

در حالت کلی اگر به‌جای ارتفاع‌ها سه خطّ همرس در نظر بگیریم، کافی است به‌جای H_3,H_2,H_1 محل تلاقی خطوط سه‌گانه را با اضلاع مثلث، جایگزین کنیم.

۶- ماخ این دو متحرک فقط روی قطر عمود بر AB می‌توانند به هم برخورد کنند. تعداد حرکت‌های ممکن $16\times 16=256$ است. حالات مساعد به موارد زیر امکان‌پذیر است.

الف) B چهار مرحله‌ی متوالیِ افقی و A چهار مرحله‌ی عمودی را انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۴}\times\binom{۴}{۰}=۱$$

ب) B سه مرحله‌ی افقی و یک مرحله‌ی عمودی و A سه مرحله‌ی عمودی و یک مرحله‌ی افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۳}=۱۶$$

ج) B دو مرحله‌ی افقی و دو مرحله‌ی عمودی و A دو مرحله‌ی عمودی و دو مرحله‌ی افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۴}{۲}=۳۶$$

الف) B یک مرحله‌ی افقی و سه مرحله‌ی عمودی و A یک مرحله‌ی عمودی و سه مرحله‌ی افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۴}{۱}=۱۶$$

الف) B هر چهار مرحله را عمودی و A هر چهار مرحله را افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۰}\times\binom{۴}{۴}=۱$$

پس

$$p=\frac{۱+۱۶+۳۶+۱۶+۱}{۲۵۶}=\frac{۷۰}{۲۵۶}$$

۷- ماخ با فرض $y=\frac{x-۱}{x+۱}$ داریم $x=\frac{۱+y}{۱-y}$ و $-\frac{۱}{x}=\frac{y-۱}{y+۱}$ ، $\frac{۱+x}{۱-x}=-\frac{۱}{y}$ و ازآنجا

$$f(y)+f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right)+f\left(-\frac{۱}{y}\right)=\frac{۱+y}{۱-y} \qquad (۱)$$

با فرض $y=\frac{۱+x}{۱-x}$ داریم $x=\frac{y-۱}{y+۱}$، $-\frac{۱}{x}=\frac{۱+y}{۱-y}$ و $\frac{x-۱}{x+۱}=-\frac{۱}{y}$ و ازآنجا

$$f\left(-\frac{۱}{y}\right)+f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right)+f(y)=\frac{y-۱}{y+۱} \qquad (۲)$$

و با فرض $y=-\frac{۱}{x}$ داریم $x=-\frac{۱}{y}$، $\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{۱+y}{۱-y}$ و $\frac{۱+x}{۱-x}=\frac{y-۱}{y+۱}$ و ازآنجا

$$f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right)+f(y)+f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right)=-\frac{۱}{y} \qquad (۳)$$

با جمع معادلات (۱)، (۲) و (۳) داریم

$$۳f(y)+۲f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right)+۲f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right)+۲f\left(-\frac{۱}{y}\right)=\frac{۴y}{۱-y^۲}-\frac{۱}{y}$$

$$\Rightarrow ۳f(y)+۲y=\frac{۵y^{۲}-۱}{y(۱-y^{۲})}$$

$$\Rightarrow f(y)=\frac{۲y^{۴}+۳y^{۲}-۱}{۳y(۱-y^{۲})}$$

۸- فرض کنیم که $b_۱\geq b_۲\geq \ldots \geq b_n>۰$ و قرار دهیم

$$\forall k\leq n, \qquad S_k=\sum_{i=۱}^{k} b_i-a_i$$

آنگاه $b_۱-a_۱=S_۱$ ، $b_۲-a_۲=S_۲-S_۱$، . . . و $b_n-a_n=S_n-S_{n-۱}$. درنتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} b_i-a_i\;\; a_i=S_۱a_۱+(S_۲-S_۱)a_۲+\ldots+(S_n-S_{n-۱})a_n$$

$$S_۱(a_۱-a_۲)+S_۲(a_۲-a_۳)+\ldots S_{n-۱}(a_{n-۱}-a_n)+S_na_n\geq ۰$$

یعنی $\sum_{i=۱}^{n} a_i^{۲}b_i\geq \sum_{i=۱}^{n} a_ib_i$. به همین شکل $\sum_{i=۱}^{n} b_i-a_i\;\; b_i\geq ۰$ و درنتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} b_i^{۲}\geq \sum_{i=۱}^{n} a_ib_i\geq \sum_{i=۱}^{n} a_i^{۲}$$